

---

# Klausur zur Übung theoretische Mechanik

WS 2016/17

06. Februar 2017

Name: \_\_\_\_\_

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

ID Nummer: \_\_\_\_\_

Notieren Sie auf jeder Seite Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die ID Nummer.  
Zum bestehen der Klausur sind maximal 50 Punkte erforderlich. Begründen Sie alle  
Antworten! Lediglich ein Ergebnis führt zu Punktabzug.

K4a	K4b	K4c	K5a	K5b	K6a	K6b	Bonus	$\Sigma$	Note

## Aufgabe K4: Arbeit (4+26+10 Punkte)

Gegeben ist im dreidimensionalen Raum in Kugelkoordinaten das Kraftfeld ( $\lambda > 0$ )

$$\vec{F}(r) = \frac{F_0}{r + \lambda} \vec{e}_r.$$

- Ist das Kraftfeld konservativ?
- Welche Arbeit wird in diesem Kraftfeld verrichtet, wenn ein Teilchen zunächst vom Ursprung entlang der positiven  $x$ -Achse um die Strecke  $R_0$  verschoben wird und dann in einem Viertelkreis auf die negative  $y$ -Achse?
- Welche Arbeit wird verrichtet, wenn das Teilchen vom Ursprung um die Strecke  $R_1$  auf der negativen  $y$ -Achse verschoben wird?

## Aufgabe K5: Schwingungen (25+15 Punkte)

Betrachten Sie zwei gewöhnliche Pendel ungleicher Massen  $m_1$  und  $m_2$  und ungleicher Längen  $l_1$  und  $l_2$ . In Ruhe hängen sie senkrecht entlang der  $z$ -Achse, beide am Anschlagpunkt  $z = 0$ , ihr Auslenkungswinkel gegen die  $z$ -Achse sei durch  $\phi_1$  und  $\phi_2$  gegeben. Es wirke ein homogenes Schwerfeld entlang der (negativen)  $z$ -Achse. Die beiden Pendeln seien darüberhinaus mit einer Feder mit Potential  $\alpha(\phi_1 - \phi_2)^2/2$  gekoppelt. Ihr Abstand entlang der  $x$ -Achse spielt daher keine Rolle.

- Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.
- Stellen Sie die Lagrangegleichungen zweiter Art auf.

## Aufgabe K6: Kanonische Transformationen (8+12 Punkte)

- a) Ist  $Q = 2(p + q^2)^3$ ,  $P = -2(p - q^2)^3$  eine kanonische Transformation?  
 b) Welche kanonische Transformation ergibt sich für  $Q$  und  $P$  aus  $F_2(q, P) = \cos(P+q)$ ?

### Formelsammlung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+x)^n} &\approx 1 - nx \text{ für } x \ll 1; \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}; \quad \vec{p} = m\vec{v}; \quad W = \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{F}; \quad E = T + V; \quad \vec{L} = \\
 \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}; \quad \frac{d(T+V)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}; \quad m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cen} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{tr} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - \\
 m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') &- m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{x}' + m\ddot{\vec{R}}'; \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1); \quad g_{\mu\nu}k^\nu = k_\mu; \quad g_{\nu\mu}k^\mu = \\
 k_\nu; \quad g^{\nu\mu}k_\mu &= k^\nu; \quad g^{\mu\nu}k_\nu = k^\mu; \quad \vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)\frac{\vec{x}\vec{v}}{v^2} - \gamma\vec{v}t; \quad ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{x}\vec{v}}{c}\right); \quad \vec{w}' = \\
 \frac{1}{1 - \frac{v\omega_x}{c^2}} &\left(w_x - v, \frac{w_y}{\gamma}, \frac{w_z}{\gamma}\right)^T; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}; \quad u^\mu = \gamma(v)(c, \vec{v}); \quad m\frac{du^\mu}{d\tau} = K^\mu; \quad dt = \\
 \gamma d\tau; \quad K^\mu &= \gamma(v)\left(\frac{\vec{F}\vec{v}}{c}, \vec{F}\right); \quad p^\mu = (E/c, \vec{p}); \quad \vec{F} = \frac{Gm_1^2m_2^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}; \quad \left(\vec{F}(\vec{x})\right)_i = -\partial_{x_i}V(\vec{x}); \\
 d_t^2\vec{r}(t) &= -\frac{\alpha}{m}\vec{r}; \quad \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = V_e(r); \quad M = \sum_i m_i; \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i; \quad \vec{L} = \sum m_i\epsilon_{ijk}r_i\dot{r}_j\vec{e}_k; \\
 \mu &= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}; \quad p + q = p' + q'; \quad \sigma(\Omega)d\Omega = \frac{\text{Particles going into } d\Omega}{\text{Total incident particles}}; \quad M_V = \int_V d^3\vec{r}\rho(r); \quad J = \\
 \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r}) &\left|\epsilon_{ijk}\frac{\vec{\omega}_i}{\omega}\dot{r}_j\vec{e}_k\right|^2; \quad V(x) \approx V(x_0) + d_xV(x)|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{d_x^2V(x)|_{x=x_0}}{2}(x - x_0)^2 + \\
 \mathcal{O}((x - x_0)^3); &\quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \Lambda(t)\vec{R}(t); \quad J_{ij} = \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})(\vec{r}^2\delta_{ij} - r_i r_j); \quad x^2 = \vec{x}^2 - c^2t^2; \\
 (x')_\mu &= \Lambda_\nu^\mu x_\nu; \quad v_\mu g^{\mu\nu}v_\nu = v_\mu v^\mu; \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}; \quad (\vec{K}_i - dt\vec{p}_i)\delta\vec{r}_i = 0; \quad Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}; \\
 \left(dt\frac{\partial T}{\partial d_t q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right) &\delta q_j = 0; \quad L = T - V; \quad d_t\frac{\partial L}{\partial d_t q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad L = T - U; \quad Q_i = d_t\frac{\partial U}{\partial d_t q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}; \\
 p_i &= \frac{\partial L}{\partial d_t q_i}; \quad f_{ji}(q_1, \dots, q_r, t)dq_i + f_j(q_1, \dots, q_r, t)dt = 0; \quad d_t\frac{\partial L}{\partial d_t q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \lambda_j f_{ji} = 0; \quad \tilde{Q}_i = \\
 \lambda_j f_{ji}; &\quad \int_t^{t+\tau} T dt = -\frac{n}{2} \int_t^{t+\tau} V dt; \quad \int_t^{t+\tau} T dt = -\frac{1}{2} \int_t^{t+\tau} \vec{r}_i \vec{F}_i dt; \quad S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t); \quad \delta S = 0; \\
 y(x) &= y_s(x) + \alpha\eta(x); \quad S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt(T + \vec{K}_i \vec{r}_i); \quad g(u) = f(x) - ux = f(x) - x\frac{df}{dx}; \\
 f(x) &= g(u(x)) + u(x)x; \quad H(q_i, p_i, t) = p_i d_t q_i(q_j, p_j) - L(q_i, p_i(q_j, p_j), t); \quad d_t q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \\
 d_t p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}; \quad d_t H = \partial_t H; \quad H = T + V; \quad A = \int_{t_1}^{t_2} dt p_i d_t q_i; \quad S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x_\mu, u_\mu, \tau) d\tau; \\
 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} &= p_i; \quad \frac{\partial F_1}{\partial P_i} = -P_i; \quad \partial_t F_1(q_i(Q_i, P_i, t), Q_i, t) = h(Q_i, P_i, t) - H(q_i(Q_i, P_i, t), p_i(Q_i, P_i, t)); \\
 \frac{\partial F_2}{\partial q_i} &= p_i; \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i; \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = h - H; \quad \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = -q_i; \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = P_i; \quad \frac{\partial F_3}{\partial t} = h - H; \quad \frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -q_i; \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = Q_i; \\
 \frac{\partial F_4}{\partial t} &= h - H; \quad \{f, g\}_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}; \quad d_t f = \{f, H\} + \partial_t f; \quad \{q_j, q_k\} = 0; \quad \{p_j, p_k\} = 0; \\
 \{q_j, p_k\} &= \delta_{jk}; \quad \{f, f\} = 0; \quad \{f(q_j), g(q_k)\} = 0; \quad \{f(p_j), g(p_k)\} = 0; \quad \{c, g(p_j, q_j)\} = 0; \\
 \{f, g\} &= -\{g, f\}; \quad \{c_1 f_1 + c_2 f_2, f_3\} = c_1 \{f_1, f_3\} + c_2 \{f_2, f_3\}; \quad \{f_1 f_2, f_3\} = f_1 \{f_2, f_3\} + \\
 \{f_1, f_3\} f_2; &\quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0; \quad F_2 = q_i P_i + \epsilon G(q_i, P_i) \rightarrow \delta u = \epsilon \{u, G\}; \\
 H\left(q_i, \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, t\right) &+ \partial_t F_2 = 0; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_i} = \beta_i; \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}; \quad F_2 = W'(q_1, \dots, q_{k-1}) + \sum_{i \geq k} \alpha_i q_i - Et; \\
 F_2 = \int dt L; &\quad J_i = \oint_\tau p_i dq_i; \quad \omega_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}; \quad J = J_1(\phi) J_3(\theta) J_1(\psi); \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = M_3; \\
 B_{ij} &= V_{ij} - m_{ij} \omega^2; \quad \det B = 0; \quad \vec{\eta} = A\vec{\zeta}; \quad \eta_i = \sum_k a_k^i f_k \cos(\omega t + \delta_k); \quad S = \int dt L = \int dt d^3\vec{r} \mathcal{L}; \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \eta} &+ \frac{d}{dr_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \eta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0; \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \eta}; \quad \mathcal{H} = \pi d_t \eta - \mathcal{L}; \quad I = I_{\text{Schwerpunkt}} + ml^2
 \end{aligned}$$